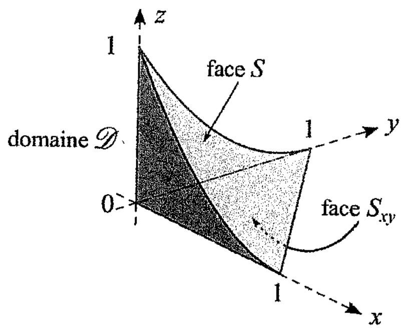
Mathématiques pour l'ingénieur
Test du 17 Novembre 2022 – durée : 1h

N.B. Documents et calculatrices non autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Développez avec précision l'argument qui justifie votre réponse à chaque question.

Exercice 1. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère cartésien orthonormal direct (O, e_1, e_2, e_3) on considère le domaine

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y \leq 1, z \leq (x+y-1)^2\right\}.$$



Soient S_{xy} (respectivement S_{xz} et S_{yz}) sa face incluse dans le plan (Oxy) (respectivement (Oxz) et (Oyz)). Sa face non-plane et oblique est

$$S = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y \leq 1, z = (x+y-1)^2\right\}.$$

Le bord de $\mathscr{D}$ est donc $\partial\mathscr{D} = S \cup S_{xy} \cup S_{xz} \cup S_{yz}$.

Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z).$$

(1) Donner le vecteur normal unitaire n_{xy} à la surface S_{xy} sortant de $\mathscr{D}$. En déduire le flux $\iint_{S_{xy}} \mathbf{f} \cdot n_{xy} dS$, de $\mathbf{f}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers S_{xy}.
Calculer de même les flux $\iint_{S_{xz}} \mathbf{f} \cdot n_{xz} dS$ et $\iint_{S_{yz}} \mathbf{f} \cdot n_{yz} dS$ après avoir déterminer n_{xz} et n_{yz}.

(2) Calculer la divergence de $\mathbf{f}$. En déduire l'intégrale

$$\iiint_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \mathbf{f}(x,y,z)\,dxdydz.$$

(3) En appliquant le théorème de la divergence, calculer le flux de $\mathbf{f}$, sortant de $\mathscr{D}$ à travers la surface non-plane S.

(4) En appliquant le théorème de Stokes, calculer la circulation de $\mathbf{f}$ le long du bord de S_{xy} (en précisant le sens de circulation choisi).

Exercice 2. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$\mathbf{f}(x,y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2).$$

(1) Calculer l'intégrale curviligne du champ $\mathbf{f}$ le long du segment de $A = (1,0)$ vers $B = (0,1)$. (utiliser une paramétrisation du segment $[AB]$)

(2) Montrer que $\mathbf{f}$ est un champ gradient.

(3) Déterminer alors h tel que $\mathbf{f} = \nabla h$.

(4) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\ell$ le long de la courbe Γ parametrée par

$$\gamma(t) = \left(\cos^5 t, \sin^4 t\right), \quad t : \frac{\pi}{2} \to \pi.$$

K. Koufany

Test de novembre 2022.

<u>Ex 1</u> Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+3} \ / \ x+y \leq 1, \ z \leq (x+y-1)^2\}$$

$$\partial D = S_{xy} \cup S_{xz} \cup S_{yz} \cup S$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+3} \ / \ x+y \leq 1, \ z = (x+y-1)^2\}$$

$S_{xy} \subset (xOy)$, $S_{xz} \subset (xOz)$, $S_{yz} \subset (yOz)$

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1) Soit $\vec{n_{xy}}$ vecteur unitaire normal à S_{xy} (sens sortant de D).

Puisque $S_{xy} \subset (xOy)$, $\vec{n_{xy}}$ est colinéaire à $\vec{e_3}$.

Si on veut dans le sens sortant et unitaire, il suffit de prendre : $\vec{n_{xy}} = -\vec{e_3}$

Un point de S_{xy} est nécessairement tel que $z = 0$

S'en suit :

$$\iint_{S_{xy}} \vec{f} \cdot \vec{n_{xy}} \, ds = \iint_{(x,y) \in S_{xy}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy$$

$$= \iint_{(x,y) \in S_{xy}} 0 \, dx dy = 0 .$$

De la même façon : $n_{xz} = -\vec{e_2}$ et $n_{yz} = -\vec{e_1}$

et $$\iint_{S_{xz}} \vec{f} \cdot \vec{n}_{xz}\, dS = \iint_{(x,z)\in S_{xz}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx\, dz = 0$$

$$\iint_{S_{yz}} \vec{f} \cdot \vec{n}_{yz}\, dS = \iint_{(y,z)\in S_{yz}} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy\, dz = 0 .$$

2) $$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = 3 . \iiint_{\mathcal{D}} dx\, dy\, dz$$

$$= 3 . \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{(x+y-1)^2} dz \right) dy \right) dx$$

$$= 3 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y-1)^2\, dy \right) dx$$

$$= 3 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x+y-1)^3 \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 -(x-1)^3\, dx = -\frac{1}{4} \left[(x-1)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

3) Thm de la divergence : $$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial \mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$$

Soit : $\frac{1}{4} = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{n}\, ds + \underbrace{\iint_{S_{xy}} \vec{f}\cdot\vec{n_{xy}}\, ds}_{0} + \underbrace{\iint_{S_{yz}} \vec{f}\cdot\vec{n_{yz}}\, ds}_{0} + \underbrace{\iint_{S_{xz}} \vec{f}\cdot\vec{n_{xz}}\, ds}_{0}$

Et donc : $\iint_S \vec{f}\cdot\vec{n}\, ds = \frac{1}{4}$

4) Thm de Stokes : $\int_{\partial S_{xy}} \vec{f}\cdot\vec{dl} = \iint_{S_{xy}} \vec{rot}\,\vec{f}\cdot(-\vec{e_3})\, ds$

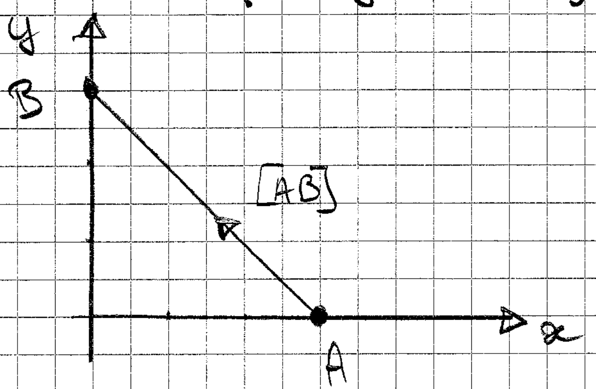
$\vec{rot}\,\vec{f} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$

Et donc : $\int_{\partial S_{xy}} \vec{f}\cdot\vec{dl} = 0$.

Ex2

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix}2xy+y^2-1\\ 2xy+x^2\end{pmatrix}$$

1)



$A=(1,0)$

$B=(0,1)$

$[AB]$: $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

On note $\vec{\gamma}(t)$ cette paramétrisation : $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$

$$\int_{[AB]} \vec{f} . d\vec{\gamma} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(1-t)t + t^2 - 1 \\ 2(1-t)t + (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 -\cancel{2(1-t)t} - t^2 + 1 + \cancel{2(1-t)t} + (1-t)^2 \, dt$$

$$= \int_0^1 -\cancel{t^2} + 1 + 1 - 2t \cancel{+t^2} \, dt$$

$$= 2\int_0^1 1 - t \, dt = 2\Big(1 - \underbrace{\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1}_{=\frac{1}{2}}\Big) = \underline{1} .$$

(2) Posons : $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 - 1 \\ 2xy + x^2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 2x$$

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. La forme différentielle associée à $\vec{f}$ est fermée donc exacte (sur $\mathbb{R}^2$)

$\vec{f}$ est donc un champ de gradient

(3) Soit $h(x,y)$ tel que $\vec{f} = \vec{\nabla} h$

On a $\dfrac{\partial h}{\partial x} = P(x,y) = 2xy + y^2 - 1$

En intégrant par rapport à x :

$$h(x,y) = x^2y + y^2x - x + c(y)$$

On dérive cette expression (par rapport à y) et on identifie à $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \underbrace{x^2} + \underbrace{2yx} + c'(y) = Q(x,y) = \underbrace{2xy} + \underbrace{x^2}$$

Ainsi : $c'(y) = 0 \implies c(y) = \lambda \in \mathbb{R}$.

Finalement : $h(x,y) = x^2y + y^2x - x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4) Soit Γ : $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^4 t \end{pmatrix}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_{\pi/2}^{\pi} \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \vec{\nabla} h(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt = h(\vec{\gamma}(\pi)) - h\left(\vec{\gamma}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= h(-1,0) - h(0,1) = 1 + \lambda - \lambda = \underline{1}$$